

Acél oszlop-gerenda kapcsolat tervezése topológiai optimalizálás alkalmazásával

GRUBITS PÉTER¹

Absztrakt: A következő tanulmány egy újszerű keretrendszer bemutatását tartalmazza, mely acél oszlop-gerenda kapcsolatok gazdaságos és biztonságos tervezésére vonatkozik a topológiai optimalizálás segítségével. A létrehozott eljárás a BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) algoritmus alkalmazásával képes szisztematikusan és iteratív jelleggel csökkenteni a felhasznált anyag mennyiségét, miközben a vizsgált kapcsolat merevségének maximalizálására törekszik. A keretrendszer figyelembe veszi a tartószerkezeti viselkedés pontos leírásához szükséges anyagi és geometriai nemlinearitásokat, ezáltal növelve a méretezés megbízhatóságát. A módszertan hatékonysága egy numerikus példán keresztül került igazolásra, amelyben a hagyományos homloklemes kialakításhoz képest azonos anyagfelhasználás mellett jelentős szerkezeti teljesítménynövekedés érhető el. Összességében a bemutatott eredmények bizonyítják az innovatív és fejlett tervezési eljárások relevanciáját a tartószerkezeti csomóponti tervezés területén.

Kulcsszavak: acélkapcsolat, optimalizáció, BESO, rugalmas-képlékeny tervezés

1. Bevezetés

A szerkezettervezés általános célja a rendelkezésre álló anyagmennyiség minél hatékonyabb felhasználása. Ennek megfelelően a tartószerkezeti optimalizáció jelentősége az utóbbi évtizedekben folyamatosan nőtt, ahol az alapelv a szerkezet teljesítményének maximalizálása a térfogat vagy tömeg minimalizálásával előre meghatározott korlátok között [1]. E területen belül a méret- és alakoptimalizálás mellett kiemelkedő kategória a topológiaoptyimalizálás [2]. Az évek során számos módszer került kidolgozásra a topológiai optimalizálás megvalósítására, amelyek közül az egyik meghatározó megoldás az úgynevezett „Evolutionary Structural Optimization (ESO)” [3] technika. Az eljárásnak a lényege, hogy a kihasználatlan anyag a feszültségi szintnek megfelelően progresszívan kerüljön eltávolításra egy meghatározott tervezési tartományon belül. Ennek egy továbbfejlesztett változata a „Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO)”, amely az ESO limitációit áthidalva az eltávolításon kívül anyag hozzáadására is képes a megfelelő érzékenységi mérőszám alkalmazásával [4].

A topológiai optimalizálás egyik meghatározó alkalmazási területe az acélszerkezetek méretezése, ahol számos tanulmány bizonyította az eljárás tudományos és gyakorlati

¹ Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskola, Témavezető: Dr. Movahedi Rad Majid, egyetemi tanár, Vállalati szakértő: Dr. Balogh Tamás, Munkáltató: Inter-CAD Mérnöki Szoftverfejlesztő Kft.

potenciálját [5–7]. Ezen belül az utóbbi években az acél csomópontok tervezésében is egyre nagyobb jelentőséggel bír ez a fajta módszer [8,9]. Ugyanakkor a megvalósítások többsége lineáris anyagviselkedés mellett és a kis elmozdulások tartományában optimalizálja a kifejezetten szelvények összekapcsolására szolgáló tervezési tartományt.

Ennek a limitációnak az áthidalására a jelen tanulmány egy BESO alapú, acél oszlop-gerenda csomópontok optimalizálására alkalmas eljárást mutat be, amely anyagilag és geometriailag nemlineáris analízisre épül. Az optimalizáció során az érzékenységi mérőszám meghatározása a teljes külső munkán alapul, amely magában foglalja mind a rugalmas, mind a képlékeny alakváltozási energia hozzájárulását, a geometriai nemlinearitást is figyelembe véve. A módszer hatékonysága egy numerikus példán keresztül kerül bemutatásra, ahol azonos anyagfelhasználás mellett egy tradicionális homloklemez kapcsolatot teljesítménye kerül összehasonlításra az optimalizált kialakítással. Az eredmények rámutatnak a korszerű topológiai optimalizáció alapú tervezési eljárások hatékonyságára és alkalmazási potenciáljára a tartószerkezet-tervezés területén.

2. Topológiai optimalizálás BESO módszerrel és a keretrendszer megvalósítása

A topológiai optimalizálás általános célja a szerkezet merevségének maximalizálása az anyagfelhasználás korlátozása mellett [2]. Numerikus, anyagilag és geometriailag nemlineáris inkrementális analízis esetén a trapézszabály alkalmazásával ez a szerkezet által végzett teljes külső munka minimalizálásával valósítható meg egy megkívánt térfogathányad mellett, a következőképp kifejezve:

$$\text{Min: } W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\mathbf{U}_t^T - \mathbf{U}_{t-1}^T) (\mathbf{P}_t + \mathbf{P}_{t-1}) \right] \quad (1a)$$

A következő kényszerek mellett:

$$V^* = \sum_{i=1}^N V_i x_i \quad (1b)$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad (1c)$$

$$\frac{V^*}{V_0} - V_f \leq 0 \quad (1d)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{P}^{\text{int}} = 0 \quad (1e)$$

ahol W a teljes külső munkát, n a numerikus iterációk számát, $\mathbf{U}_t$ és $\mathbf{P}_t$ pedig a csomóponti elmozdulás vektort, valamint a külső csomóponti tehervektort jelöli az t -edik iterációban. Ezt kiegészítve az (1b) egyenlet a megkívánt céltérfogat V^* kiszámítását fejezi ki, amely az összes N elem egyedi térfogatának V_i és a hozzá tartozó bináris tervezési paraméter x_i szorzatának összegéből adódik. Utóbbi lehetséges értéke az (1c) egyenlet alapján 0 vagy 1, ezzel jelölve az adott elem jelenlétét vagy hiányát. Továbbá az (1d) kifejezés a térfogatkényszert írja le, ahol V_0

a tervezési tartomány teljes térfogatát, V_f pedig a megkívánt térfogathányadot jelöli. Végül az (1e) összefüggés a geometriailag nemlineáris egyensúlyi feltételt fejezi ki a belső $\mathbf{P}^{int}$ és külső $\mathbf{P}$ erővektor függvényében.

Az (1a)–(1e) egyenlettel kifejezett matematikai probléma kezelésére szolgál a BESO módszer, amely az alábbi érzékenységi szám bevezetésével képes iteratív módon meghatározni az i -edik elem jelenlétének vagy hiányának szükségességét:

$$\alpha_i^e = \Delta W_i = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\mathbf{U}_{i,t}^T - \mathbf{U}_{i,t-1}^T) (\mathbf{P}_{i,t} + \mathbf{P}_{i,t-1}) \quad (2)$$

ahol ΔW_i az i -edik elem hozzájárulása a teljes külső munkához, $\mathbf{U}_{i,t}$ és $\mathbf{P}_{i,t}$ az adott elemhez tartozó csomóponti elmozdulás-, illetve tehervektort jelöli a t -edik terhelési lépésben. A virtuális munka tétele értelmében ez egyenértékű az elem rugalmas és képlékeny alakváltozási energiájának összegével, így az érzékenységi szám nemlineáris anyagviselkedés esetén mindkét hozzájárulást magában foglalja.

A sakktáblaszerű alakzatok elkerülése és a végeelem-hálótól független megvalósítás érdekében a BESO módszer egy szűrőmechanizmust alkalmaz [10]. Ennek a megoldásnak a lényege, hogy egy állandó értékű r_{min} szűrőszög által definiált Ω_i résztartományon belül az i -edik elem érzékenységét meghatározó csomópontok azonosításra kerülnek, amelyek felhasználásával a módosított érzékenység a következő képlettel kerül kiszámításra:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^k \omega(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^k \omega(r_{ij})} \quad (3)$$

ahol k az Ω_i résztartományon belüli csomópontok száma, α_j^n a j -edik csomópont érzékenységi értéke, valamint $\omega(r_{ij})$ a lineáris súlyfüggvény, amely a következőképp írható le:

$$\omega(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \quad (4)$$

Ebben az összefüggésben r_{ij} az i -edik elem középpontja és a j -edik csomópont közötti távolságot jelöli. Ezt kiegészítve α_j^n képlete:

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^M w_i \alpha_i^e \quad (5)$$

ahol M a j -edik csomóponthoz kapcsolódó elemek száma, w_i pedig az i -edik elem súlya, a következőképp számolva:

$$w_i = \frac{1}{M-1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^M r_{ij}} \right) \quad (6)$$

Végül az evolúciós folyamat stabilizálása érdekében egy átlagoló séma is bevezetésre kerül az i -edik elem végső érzékenységének $\tilde{\alpha}_i$ meghatározásához:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i^l + \alpha_i^{l-1}}{2} \quad (7)$$

ahol l az aktuális BESO iteráció sorszámát jelöli. Az átlagolt érzékenységi számok meghatározását követően a definiálásra kerül a következő iteráció céltérfogata V_{l+1} a következő egyenlet alapján:

$$V_{l+1} = V_l(1 \pm ER) \quad (8)$$

amelyben V_l az aktuális l -edik lépés térfogatát jelöli, míg ER az evolúciós rátát. Ezt követően az elemek átlagolt érzékenységi számai csökkenő sorrendbe rendeződnek, majd a következő feltétel alapján törlődnek vagy adódnak hozzá a tervezési tartományhoz:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \tilde{\alpha}_i > \alpha_{add}^{th} \text{ (elem hozzáadása)} \\ 0, & \text{ha } \tilde{\alpha}_i \leq \alpha_{del}^{th} \text{ (elem törlése)} \end{cases} \quad (9)$$

ahol α_{add}^{th} és α_{del}^{th} a hozzáadás és törlés küszöbértékét fejezi ki. Ez a folyamat addig ismétlődik, amíg a céltérfogat el nem éri a megkívánt értéket:

$$V_{l+1} = V^* \quad (10)$$

Ezt követően a térfogat állandó marad, és az algoritmus pedig kizárólag az elemek átrendezését végzi a (9) egyenlet alapján a topológia finomítása érdekében.

Az algoritmus konvergenciája két egyidejűleg teljesítendő feltételhez kötött. Egyrészt a térfogathányadnak el kell érnie a céltérfogatot a (10) egyenletnek megfelelően. Másrészt a belső energia változásának stabilizálódnia kell az utolsó iterációk során, a következőképp kifejezve:

$$\frac{|\sum_{m=1}^{N_c} W_{l-m+1} - \sum_{m=1}^{N_c} W_{l-N_c-m+1}|}{\sum_{m=1}^{N_c} W_{l-N_c-m+1}} \leq \tau \quad (11)$$

ahol W_m az m -edik iterációban számított teljes belső energia a céltérfogat V^* elérésétől számítva, l az aktuális iteráció sorszáma, τ pedig a konvergencia tűréshatára. A feltétel lényege, hogy az utolsó N_c iteráció belső energiáinak összege és az azt megelőző N_c iteráció összege közötti relatív eltérés a megadott tűréshatár alá csökkenjen, ezzel biztosítva a topológia stabilitását.

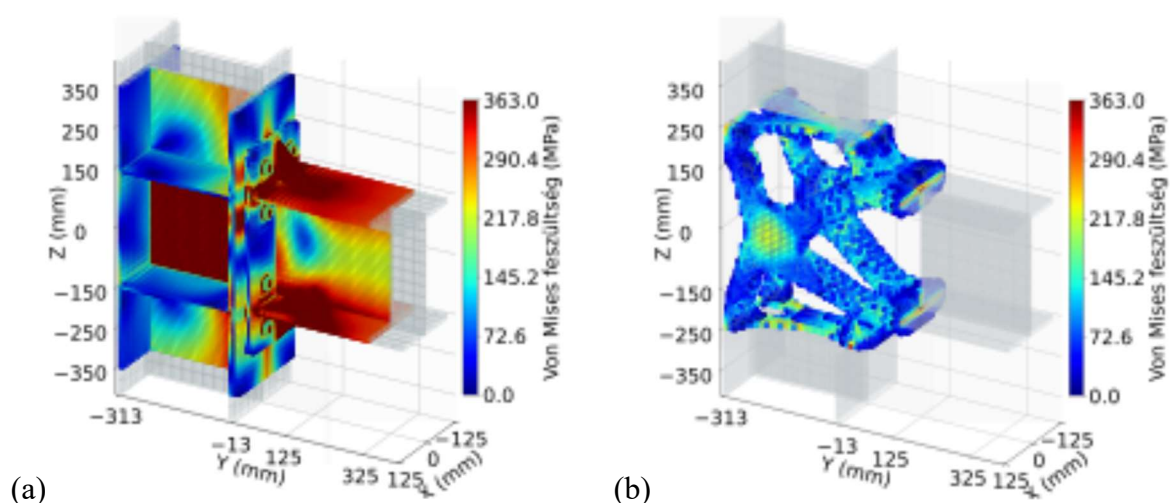
A bemutatott BESO eljárás kifejezetten alkalmas acél csomópontok topológiai optimalizálásához, ugyanis ezeknek a kialakításoknak a viselkedését legtöbbször képlékeny deformációk és nagy alakváltozások jellemzik, amelyek a fent ismertetett egyenleteken keresztül figyelembevételre kerülnek a tervezés során. A matematikai keretrendszer megvalósítása az ABAQUS [11] végelem szoftver és a PYTHON programnyelv együttes alkalmazásával történt, amelyben a geometriailag és anyagilag nemlineáris analízis képezi az optimalizáció alapját. Az eljárás működése az 1. ábrán kerül összefoglalásra.

A létrehozott végelem modellek felépítéséhez 8 csomópontú téglatest elemek (C3D8R) kerültek alkalmazásra, az alkatrészekhez egyedileg meghatározott hálómérettel. Az anyagviselkedés a Yun és Gardner [13] által javasolt elasztó-plasztikus, quad-lineáris acél modellen alapul, amelyhez a felhasznált főbb paraméterek az 1. táblázatban találhatók. A csavarok előfeszítése mind a kísérletben, mind a szimulációban megtörtént 155kN-os erő alkalmazásával [18]. Az érintkező felületek közötti kölcsönhatás felület-felület típusú kontakt-formulációval került leírásra, 0,44-es súrlódási együtthatóval [12].

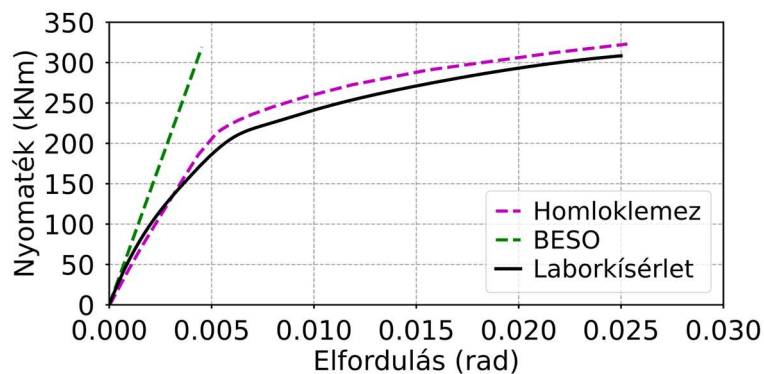
1. táblázat: Az alkalmazott anyagparaméterek

Alkatrész	Rugalmassági modulus (N/mm ²)	Folyáshatár (N/mm ²)	Szakító szilárdság (N/mm ²)
Lemez $t \leq 16\text{mm}$	190,707	391	559
Lemez $t > 16\text{mm}$	204,228	363	537
Csavar	206,000	990	1160

A kiválasztott homloklemez-es kapcsolat térfogathányada a tervezési tartományhoz viszonyítva 19,7%, így a topológiai optimalizálás során a céltérfogat $V^* = 0,2$ -re került meghatározásra. Emellett a BESO iteráció során az evolúciós ráta $ER = 0,02$ és a szűrő sugar $r_{min} = 60\text{mm}$ értékre lett beállítva. Az így kapott eredmények a 3. ábrán szerepelnek, ahol látható, hogy a homloklemez-es kapcsolathoz képest a topológiailag optimalizált konfiguráció jóval kisebb feszültségi szinten működik. A képlékenységet szenvedő elemek arányában ez utóbbi 1.00% alatt teljesít, míg a homloklemez-es kapcsolatnál az elemek 12.13%-ának von Mises feszültsége meghaladja a hozzá tartozó folyáshatárt. Ezt kiegészítve látható a 4. ábrán, hogy a nyomaték-elfordulás összefüggés tekintetében is jóval nagyobb merevséget biztosít ugyanazon terhelési szinten és anyagfelhasználás mellett a BESO módszerrel tervezett konfiguráció. A kezdeti elfordulási merevségeket összehasonlítva a javasolt kialakítás megközelítőleg 74%-kal nagyobb értéket biztosít, valamint 80%-kal kisebb elfordulást eredményez azonos erőnél.



3 ábra: A vizsgált csomóponti kialakítások összehasonlítása: (a) a homloklemez-es kapcsolat és (b) a topológiailag optimalizált kialakítás von Mises feszültségei.



4. ábra: A nyomaték-elfordulás összefüggések összehasonlítása.

4. Konklúzió

Jelen tanulmány egy BESO alapú topológia optimalizálási keretrendszert mutat be acél oszlop-gerenda kapcsolatok tervezésére, amely anyagilag és geometriailag nemlineáris végesselemez analízisre épül. A módszer az érzékenységi szám meghatározását a teljes külső munkára alapozza, ezáltal a rugalmas és képlékeny alakváltozási energia hozzájárulását egyaránt figyelembe veszi a tervezési folyamat során. Az eljárás hatékonyságának igazolására egy kiválasztott homloklemez kapcsolatot numerikus modellje került validálásra, majd összehasonlításra a topológiailag optimalizált kialakítással. Az eredmények összességében igazolják, hogy a nemlineáris BESO módszer hatékonyan alkalmazható acél csomóponti kialakítások tervezésére, és a hagyományos megoldásokhoz képest kedvezőbb szerkezeti teljesítmény érhető el.

Irodalomjegyzék

- [1] Bendsøe MP. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization* 1989;1:193–202. <https://doi.org/10.1007/BF01650949>.
- [2] W. Christensen P, Klarbring A. *An Introduction to Structural Optimization*. vol. 153. Dordrecht: Springer Netherlands; 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8666-3>.
- [3] Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comput Struct* 1993;49:885–96. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90035-C](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90035-C).
- [4] Querin OM, Steven GP, Xie YM. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. *Eng Comput (Swansea)* 1998;15:1031–48. <https://doi.org/10.1108/02644409810244129>.
- [5] Grubits P, Cucuzza R, Habashneh M, Domaneschi M, Aela P, Movahedi Rad M. Structural topology optimization for plastic-limit behavior of I-beams, considering various beam-column connections. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 2025;53:2719–43. <https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2412757>.
- [6] Habashneh M, Movahedi Rad M. Plastic-limit probabilistic structural topology optimization of steel beams. *Appl Math Model* 2024;128:347–69. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.029>.

- [7] Li Y, Ding J, Zhang Z, Zhou X, Makvandi M, Yuan PF, et al. Practical application of multi-material topology optimization to performance-based architectural design of an iconic building. *Compos Struct* 2023;325:117603. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117603>.
- [8] Tang P, Du W, Wang C, Gu J, Yang M. Topology Optimization and 3D Printing of Steel Joints by SJ-BESO and FDM Method. *International Journal of Steel Structures* 2024;24:743–57. <https://doi.org/10.1007/s13296-024-00863-2>.
- [9] Zuo W, Chen M-T, Zhao O, Gardner L. Parametric optimization-based design and testing of 3D printed stainless steel circular X-joints. *Eng Struct* 2026;353:122148. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2026.122148>.
- [10] Huang X, Xie YM. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design* 2007;43:1039–49. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.06.006>.
- [11] Michael Smith. ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.9 2009.
- [12] Shi G, Shi Y, Wang Y, Bradford MA. Numerical simulation of steel pretensioned bolted end-plate connections of different types and details. *Eng Struct* 2008;30:2677–86. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.02.013>.
- [13] Yun X, Gardner L. Stress-strain curves for hot-rolled steels. *J Constr Steel Res* 2017;133:36–46. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.01.024>.